Kwantumfysica I

2009-2010

Hoorcollege vrijdag 4 december 2009

Vragen n.a.v. stof vorige week of werkcollege?

Begrippen die je goed moet kennen voor de toets:

- Verwachtingswaarde $\langle x \rangle$ voor een toestand $\Psi(x)$
- Onzekerheid Δx voor een toestand $\Psi(x)$
- Normalizeren van een toestand $\Psi(x)$
- Heisenberg onzekerheidsrelatie
- Kans op meetuitkomsten als je x gaat meten bij een toestand $\Psi(x)$
- Toestand van een systeeem na een de meting
- Dirac notatie
- Inproduct in Dirac notatie
- Verwachtingswaarde in Dirac notatie
- Hamiltoniaan
- Energie-eigenwaarden en eigenvectoren.
- Eigenvectoren van een observabele zij orthogonaal
- Verwachtingswaarde als functie van tijd van willekeurige observabele $\hat{A}$
- Tijd-evolutie operator $\hat{U} = e^{\frac{-i\hat{H}t}{\hbar}}$ voor "kets" en $\hat{U}^{+} = e^{\frac{+i\hat{H}t}{\hbar}}$ voor "bra's"

Even polsen:

$\hat{A}$ is oparator met eigenwaarden A_1 en A_2, en bijbehorende genormaliseerde eigenfuncties $\varphi_1(x)$ en $\varphi_2(x)$.

Stel:

$$\Psi = \sqrt{\frac{1}{3}}\varphi_1 + \sqrt{\frac{a}{3}}\varphi_2$$

Voor welke *a* genormaliseerd?

2

Even polsen:

$\hat{A}$ is oparator met eigenwaarden A_1 en A_2, en bijbehorende eigenfuncties $\varphi_1(x)$ en $\varphi_2(x)$.

Stel:

$$\Psi = \sqrt{\frac{1}{3}}\varphi_1 + \sqrt{\frac{2}{3}}\varphi_2$$

Wat is de kans op meetuitkomst A_1?

1/3

Even polsen:

$\hat{A}$ is oparator met eigenwaarden A_1=0 en A_2=1, en bijbehorende eigenfuncties $\varphi_1(x)$ en $\varphi_2(x)$.

Stel:

$$\Psi = \sqrt{\frac{1}{3}}\varphi_1 + i\sqrt{\frac{2}{3}}\varphi_2$$

Wat is nu de kans op meetuitkomst A_2?

2/3

Even polsen:

$\hat{A}$ is oparator met eigenwaarden A_1=1 en A_2=2, en bijbehorende eigenfuncties $\varphi_1(x)$ en $\varphi_2(x)$.

Stel:

$$\Psi = \sqrt{\frac{1}{3}}\varphi_1 + i\sqrt{\frac{2}{3}}\varphi_2$$

Wat is de de waarde van

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_1^*(x)\hat{A}\varphi_2(x)dx$$? 0

Even polsen:

$\hat{A}$ **is oparator met eigenwaarden A_1=0 en A_2=1, en bijbehorende eigenfuncties $\varphi_1(x)$ en $\varphi_2(x)$.**

Stel:

$$\Psi = \sqrt{\frac{1}{3}}\varphi_1 + i\sqrt{\frac{2}{3}}\varphi_2$$

Wat is de de waarde van

$$\langle \hat{A} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^* \hat{A} \Psi \, dx \quad ? \qquad 2/3$$

Vandaag:

1. Fourier basics
2. Rol Fourier in quantum mechanica

Voorbeeld snelheid bepalen gegeven Psi(x)

Bij slide over Fourier op bord grafisch

integraal = 0 oplossen

Doel voor vandaag:
Aan het eind van dit college moeten deze uitdrukkingen vertrouwd aanvoelen

$$x(t) \quad \overset{\mathscr{F}}{\leftrightarrow} \quad X(\omega)$$

$$x(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{i\omega t} \, d\omega$$

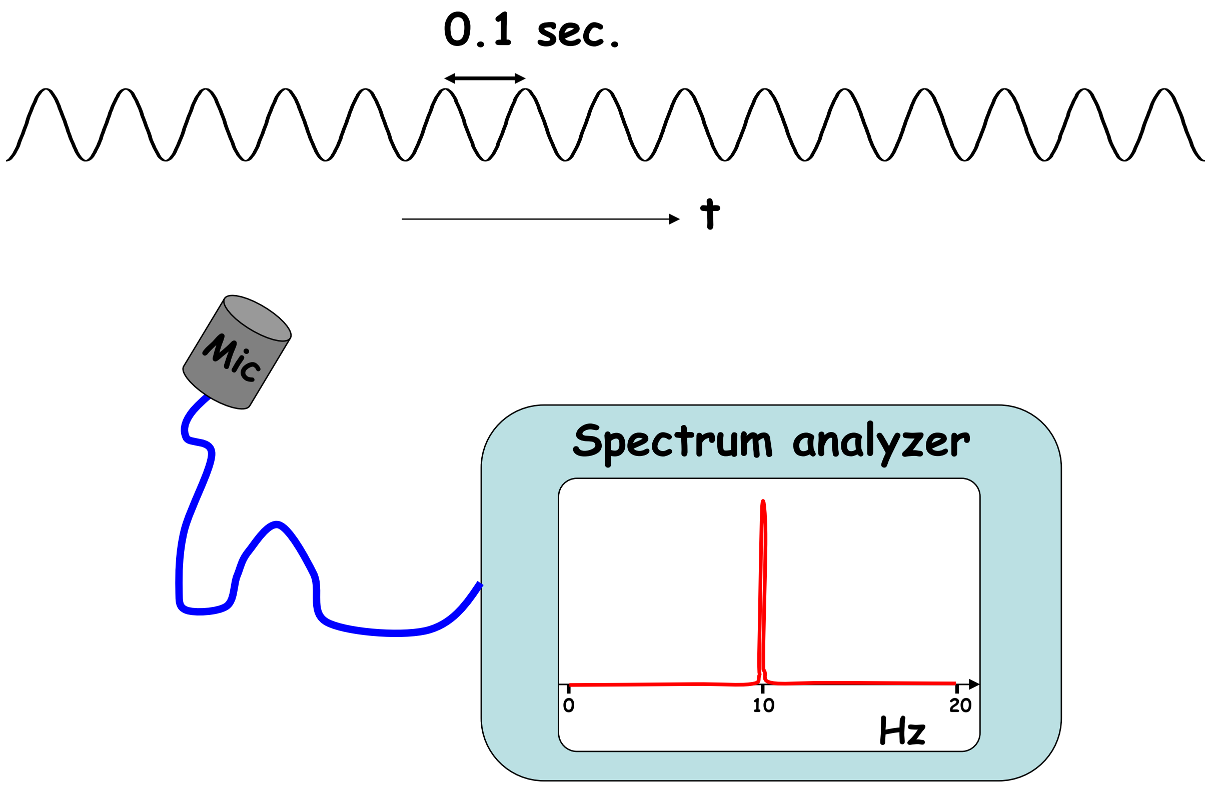
$$X(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i\omega t} \, dt$$

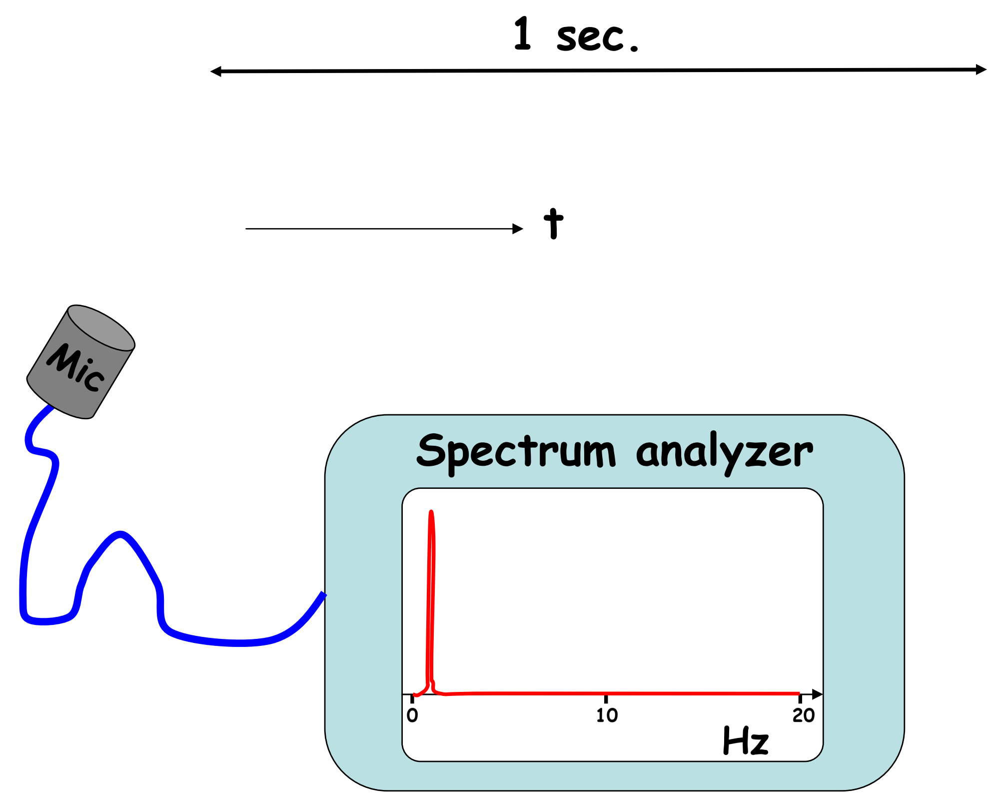
Tutorial on Fourier theory

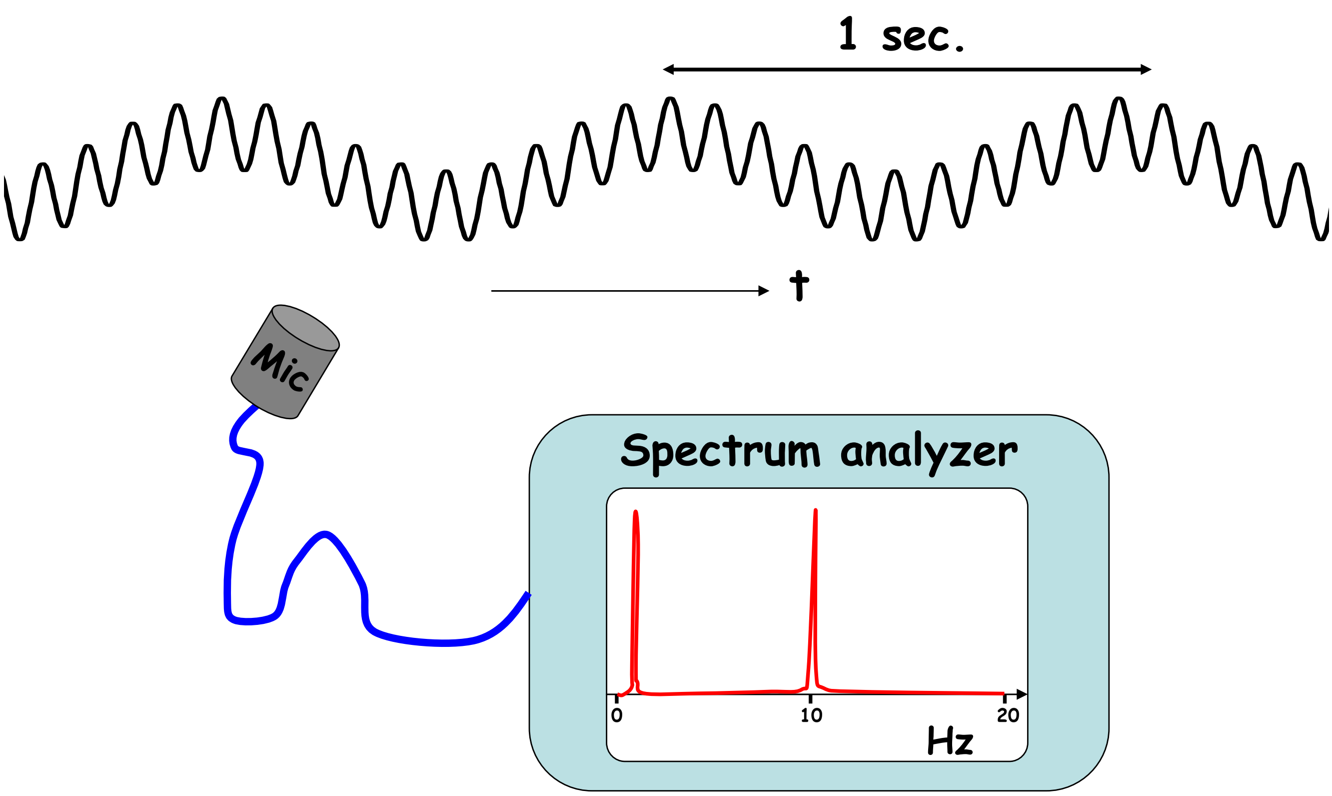
And its role in quantum mechanics

Fundamentals of complex analysis
E. B. Saff & A. D. Snider
Third ed. (Pearson Prentice Hall 2003)
(docent Prof. de Snoo)

Eerst even heel basic:




1 sec.
t
Mic
Spectrum analyzer
0
10
20
Hz


1 sec.
t
Mic
Spectrum analyzer
0
10
20
Hz

Idee achter Fourier transformatie:

Ieder fysisch signaal als functie van tijd is op unieke (en daarom inverteerbare) wijze te schrijven als lineaire combinatie van sinussen en cosinussen van allerlei frequenties.
Het kan dus worden gerepresenteerd met een amplitude-spectrum en een fase-spectrum.

$$\begin{aligned} x(t) &= \sum_{\omega} A_{\omega} \cos(\omega t) + B_{\omega} \sin(\omega t) \\ &= \sum_{\omega} C_{\omega} \cos(\omega t + \phi_{\omega}) \end{aligned}$$

$$\text{met} \quad \omega = 2\pi f$$

"Fysisch signaal " wil zeggen redelijk continu, diffentieerbaar, integreerbaar van –∞ to +∞.

Maar dus ook:

Ieder fysisch signaal als functie van frequentie is op unieke (en daarom inverteerbare) wijze te schrijven als lineaire combinatie van sinussen en cosinussen met allerlei verschillende tijdafhankelijkheid.

Gepaarde variabelen met Fourier relatie

tijd versus frequentie in tijd

$$x(t) \leftrightarrow X(\omega) \qquad \text{met} \quad \omega = 2\pi f$$

positie versus frequentie in ruimte

$$g(x) \leftrightarrow G(k) \qquad \text{met} \quad k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

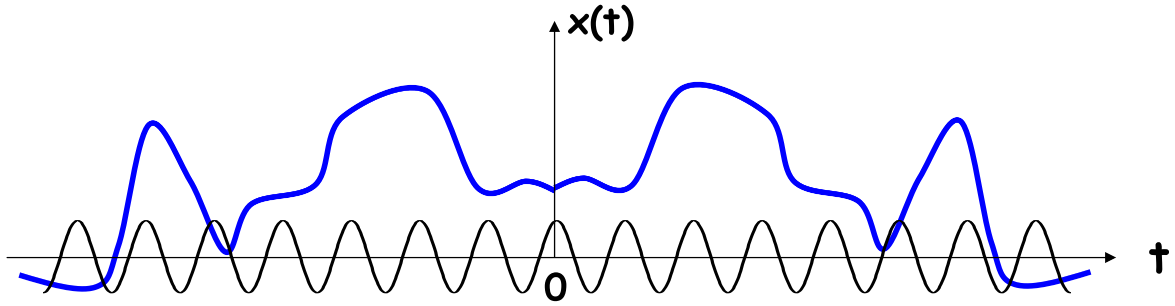
golffunctie $\Psi(x)$ versus golffunctie $\overline{\Psi}(p_x)$

$$\Psi(x) \leftrightarrow \overline{\Psi}(p_x) \qquad \text{met} \quad p_x = \hbar k \ \ \text{en} \ \ k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

Stel x(t) is even: $x(t) = \sum_{\omega} A_{\omega} \cos(\omega t)$

What is een goede maat voor A_{ω} ?

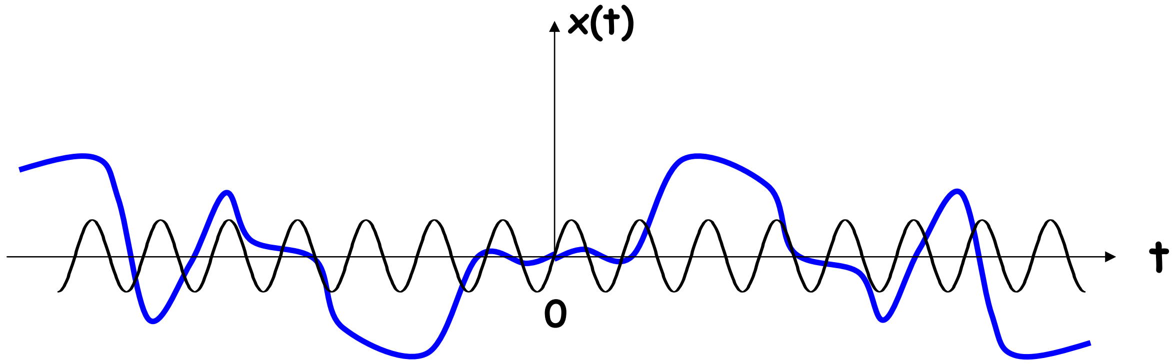
$$\boxed{A_{\omega} \propto \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot \cos(\omega t)\, dt}$$



Stel x(t) is oneven: $x(t) = \sum_{\omega} B_{\omega} \mathbf{sin}(\omega t)$

What is een goede maat voor B_{ω} ?

$$\boxed{B_{\omega} \propto \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot \mathbf{sin}(\omega t) dt}$$



Stel x(t) reëel en som van even en oneven: $x(t) = \sum_{\omega} A_{\omega} \mathbf{cos}(\omega t) + B_{\omega} \mathbf{sin}(\omega t)$

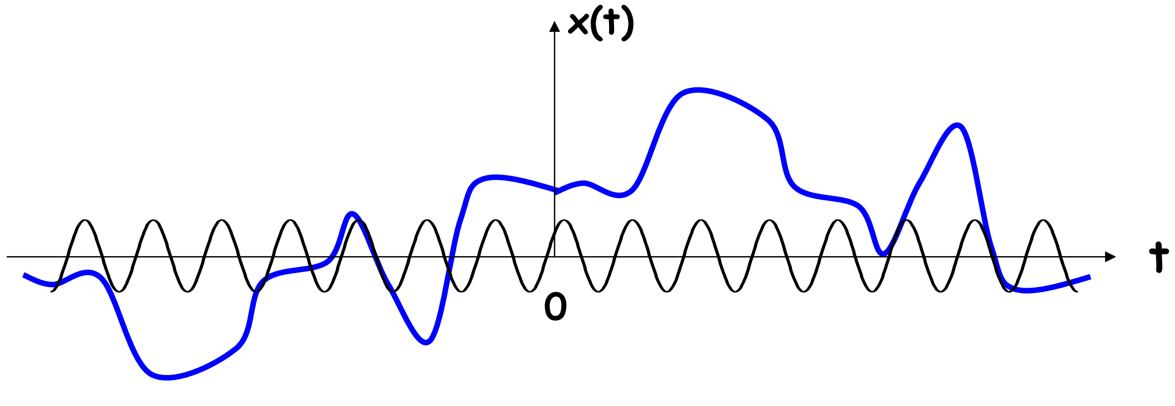
$$= \sum_{\omega} C'_{\omega} \mathbf{cos}(\omega t + \phi_{\omega})$$

What is een goede maat voor C'_{ω} ?

Makkelijker met complex spectrum: $x(t) = \sum_{\omega} \mathbf{Re}(C_{\omega} e^{i\omega t})$

$$\boxed{C_{\omega} \propto \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot e^{-i\omega t}\, dt}$$

C_{ω} heeft amplitude en phase



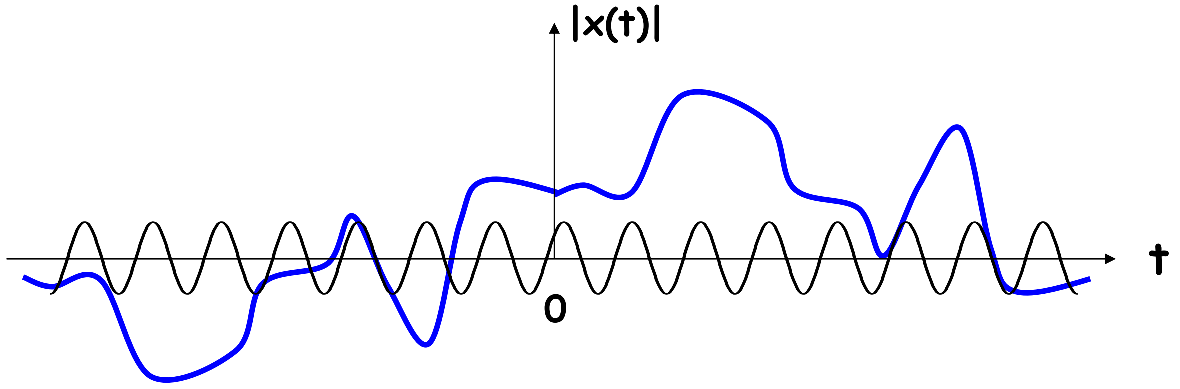
Stel x(t) complex en som van (met allerlei fasen): $x(t) = \sum_{\omega} C_{\omega} e^{i\omega t}$

What is een goede maat voor de (complexe!) C_{ω}?

Weer een complex spectrum:

$$\boxed{C_{\omega} \propto \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot e^{-i\omega t}\, dt}$$

C_{ω} heeft amplitude en phase



Algemene formulering Fourier- en inverse Fourier transformatie:

$$x(t) \overset{\mathbf{F}}{\longleftrightarrow} X(\omega)$$

$$x(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{i\omega t}\, d\omega$$

$$X(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i\omega t}\, dt$$

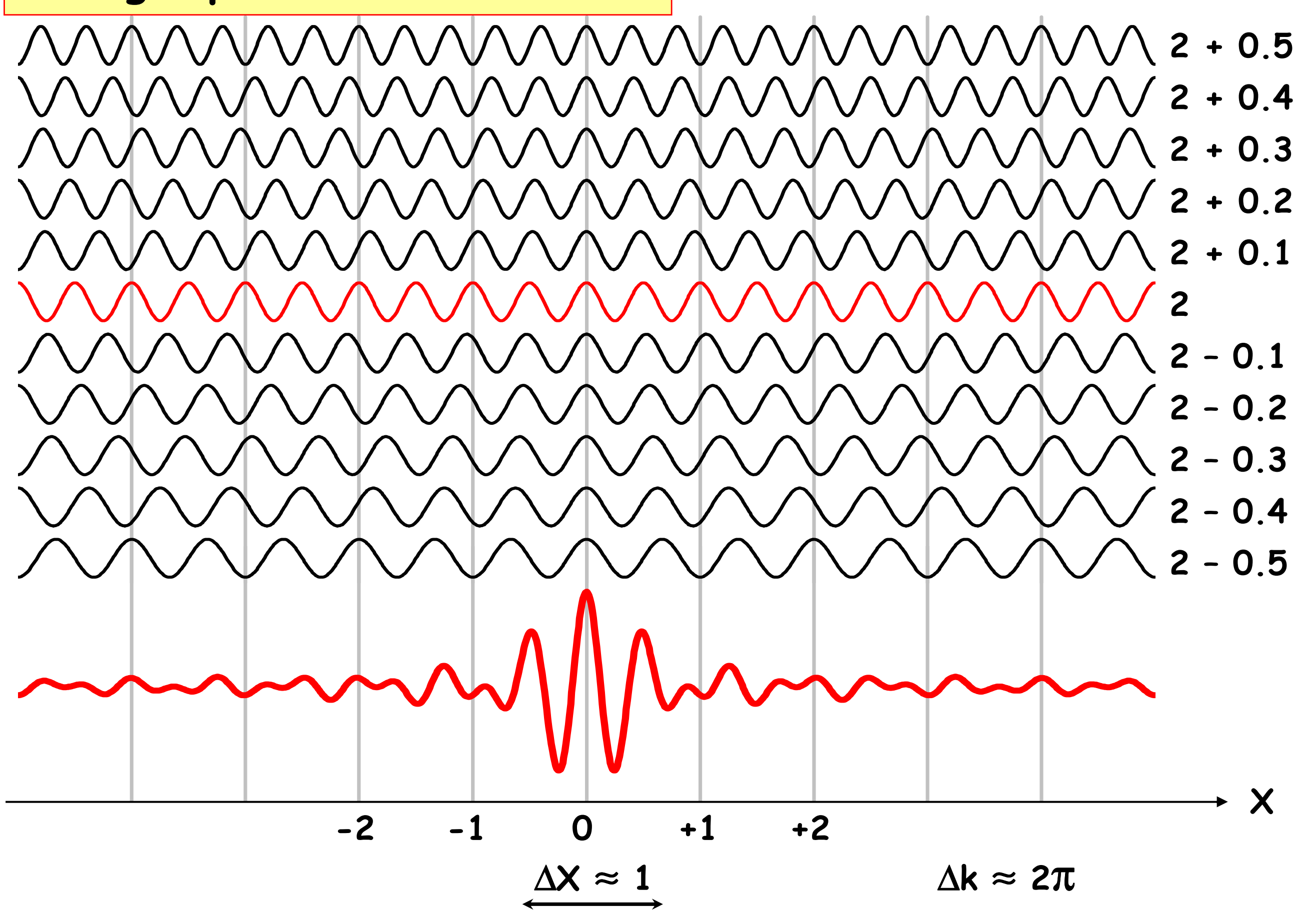
De factor $1/2\pi$ is ook wel anders verdeeld, kwestie van definitie:

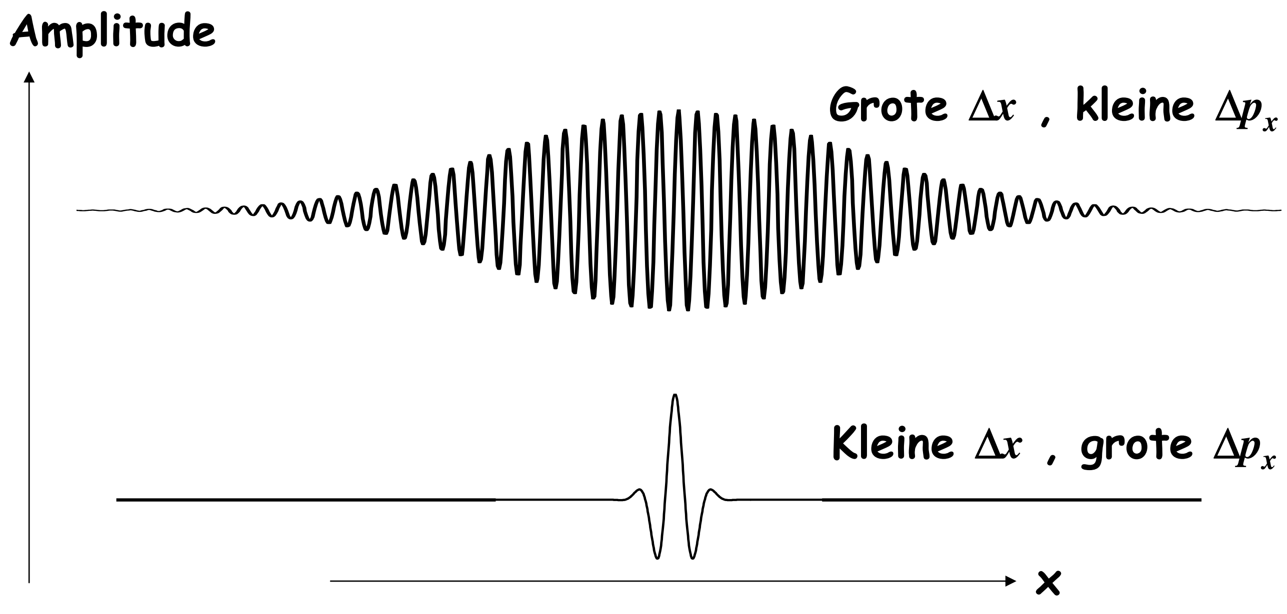
$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)e^{i\omega t}\,d\omega$$
$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-i\omega t}\,dt$$

of

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)e^{i\omega t}\,d\omega$$
$$X(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-i\omega t}\,dt$$

Voor golfpakket $\Delta x\ \Delta k \approx 2\pi$





Voor dit golfpakket $\boxed{\Delta x\, \Delta k \approx 2\pi}$

Kleinere Δx kan alleen met grotere Δk.

Kleinere Δk kan alleen met grotere Δx

Komt door Fourier transform relatie voor golven:

$$\Psi_x(x) \quad \overset{\mathbf{F}}{\leftrightarrow} \quad \overline{\Psi}_p(p)$$

$$\Psi_x(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\Psi}_p(p) e^{ipx/\hbar}\, dp$$

$$\overline{\Psi}_p(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_x(x) e^{-ipx/\hbar}\, dx$$

Samenvatting:

1. Fourier transform theory
2. Fourier transform of a quantum state
3. Fourier decompositie

Volgende college:

Commutators

Kleine rekenvoorbeeldjes